

3.4 Körperberechnungen

Körper unterteilt man in zwei Gruppen, zum einen in die der **Prismen** und zum anderen in die der **Spitzkörper**. Prismen sind Körper mit zwei identischen Grundflächen (Boden und Deckel), die durch parallele Kanten miteinander verbunden sind. Spitzkörper haben nur eine Grundfläche. Die Kanten, die von den Ecken der Grundflächen ausgehen, treffen sich alle in einem Punkt, der Spitze des Spitzkörpers.

3.4.1 Oberflächen- und Volumenformeln

Die **Oberfläche** ist die Summe aller Begrenzungsflächen. Das **Volumen** ist der Rauminhalt, der von den Begrenzungsflächen eingegrenzt wird.

Körper	Oberfläche	Volumen	Erklärungen
Prisma	$O = 2G + M$	$V = G \cdot h$	G ist die Grundfläche und h die Höhe des Prismas
Würfel	$O = 6a^2$	$V = a^3$	Alle Seiten gleich lang
Quader	$O = 2(ab + ac + bc)$	$V = a \cdot b \cdot c$	Seiten können unterschiedlich lang sein.
Zylinder	$O = 2G + M$	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$	$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
Spitzkörper	$O = G + M$	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$	M steht für die Mantelfläche
quadratische Pyramide		$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$	Es gibt noch mehr Pyramidenarten mit anderen Grundflächen
rechteckige Pyramide		$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h$	
Kegel		$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$	$M = \pi \cdot r \cdot s$ s ist die Seitenlinie des Kegels
Kugel	$O = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$	

3.4.2 Oberflächen- und Volumenberechnungen

Das Prinzip bei der Volumenberechnung ist dasselbe wie bei den Flächenberechnungen im 2-dimensionalen Raum.

Für die Oberflächenberechnungen macht man sich am besten eine Skizze und berechnet alle Begrenzungsflächen mit den Flächenformeln und addiert sie am Schluss.

Übungsaufgaben: Oberflächen- und Volumenberechnungen (Lsg S. 146)

Aufgabe 1:

Eine Konservendose hat einen Durchmesser von 10 cm und eine Höhe von 20 cm. Berechne, wie viele ml Wasser hinein passen (Tipp: $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$).

Aufgabe 2:

Eine Litfaßsäule ist 3 Meter hoch und hat einen Durchmesser von 1 Meter. Bestimme, wie viel Platz für Plakate auf dieser Säule ist.

Aufgabe 3: Ein Fußball hat in etwa einen Durchmesser von 22 cm.

- a) Berechne, wie viel Luft in den Ball passt.
- b) Bestimme, wie lang ein Seil wäre, wenn man dieses einmal um den Ball legen würde.
- c) Berechne, wie groß der Abstand zwischen dem Seil und dem Ball wäre, wenn du das Seil aus **b)** um 1 Meter verlängerst und wieder gleichmäßig um den Ball legst.
- d) Berechne, wie viel Leder für einen echten Lederfußball verwendet werden muss.

Aufgabe 4:

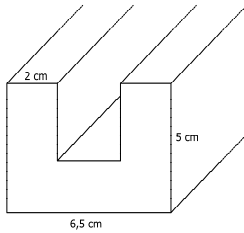
Stell dir vor, du würdest ein Seil um den Äquator spannen. Der Erdradius beträgt ca. 6370 km.

- a) Bestimme, wie lang das Seil sein müsste (rechne bitte ausnahmsweise auf so viele Nachkommastellen wie möglich).
- b) Verlängere das Seil aus Teil a) um genau 1 Meter. Entscheide begründet, ob eine Maus, eine Katze oder gar ein Mensch zwischen dem Seil und der Erde durchpassen würde, wenn du dieses Seil wieder um die Erde legen würdest.

3.5 Zusammengesetzte Körper

Zusammengesetzte Körper bestehen aus einzelnen Körpern, deshalb lassen sich ihre Oberflächen und Volumina mit den bekannten Formeln der Einzelkörper berechnen (vgl. Kapitel 3.4.1 und 3.4.2). Das gesamte Volumen erhält man durch Addition der Einzelergebnisse. Bei der Gesamtoberfläche geht das so nicht, dort muss man aufpassen, dass man keine Fläche mehrmals zählt. Die Schwierigkeit besteht also nur darin, den zusammengesetzten Körper geschickt aufzuteilen (vgl. Kapitel 3.2.3). Es gibt allerdings auch Körper, die sich einfacher durch eine Ergänzung zu einem bekannten Körper berechnen lassen. Die Berechnung erfolgt dann durch Subtraktion.

Beispiel:



Es soll ein 4 m langer Stahlträger als U-Profil der Wandstärke 2 cm gefertigt werden. Für die Berechnung der Materialkosten braucht man das Volumen. Die erste Möglichkeit ist die Berechnung über die Addition aus drei Quadern (Methode des Zusammensetzens). Dann ist:

$$V = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 400 + 2,5 \cdot 2 \cdot 400 = 10000$$

Alternativ erfolgt die Berechnung über die Ergänzungsmethode. Wir denken uns das Profil als einen großen Quader, aus dem ein kleiner Quader herausgetrennt wird. Dann ist:

$$V = 5 \cdot 6,5 \cdot 400 - 2,5 \cdot 3 \cdot 400 = 10000$$

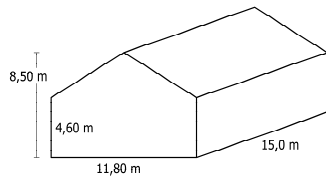
In beiden Fällen erhält man 10.000 cm^3 für das benötigte Material.

Übungsaufgaben: Zusammengesetzte Körper (Lösung S. 146)

Aufgabe 1:

Ein altes Stadttor soll saniert werden. Für den Antrag der durchzuführenden Baumaßnahmen wird das Volumen der beiden Außentürme benötigt. Diese sind zylinderförmig und haben ein kegelförmiges Spitzdach. Die Türme sind 15 m hoch und haben einen Durchmesser von ca. 10 m. Die Kegeldächer sind 12,50 m hoch. Berechne das Volumen.

Aufgabe 2:



Bei einem Einfamilienhaus mit Satteldach soll der Dachboden ausgebaut werden. Für die Berechnung der anfallenden Heizkosten soll der umbaute Raum des gesamten Hauses ermittelt werden. Berechne das Volumen.

Aufgabe 3:

Als besonders Outdoor-tauglich haben sich nach einer Teststudie solche Zelte erwiesen, die wenig Angriffsfläche für starken Wind bieten. Das Modell „Arktis“ besteht aus einem Halbzylinder als Hauptzelt mit zwei Viertelkugeln an beiden Enden. Das Hauptzelt ist 4 m lang, das komplette Zelt misst außen in der Länge 7,60 m. Berechne den Innenraum des Zeltes und die Fläche der Zeltplane (ohne Boden).

3.6 Restkörper

Restkörper entstehen dann, wenn von einem Körper ein Teil abgeschnitten wird. Dabei entsteht eine neue Körperform. So wird z.B. aus der Viereckspyramide mit quadratischer Grundfläche der so genannte **Pyramidenstumpf**, indem die Spitze der Pyramide entfernt wird. Ebenso erhält man durch Abschneiden der Spitze bei einem Kegel den **Kegelstumpf**. Da die abgeschnittenen Teile jeweils wieder Pyramiden bzw. Kegel sind, kann man die Volumina der Stümpfe berechnen, indem man von dem großen Gesamtkörper den kleinen Teilkörper subtrahiert.

Es gibt jedoch auch Berechnungsformeln für derartige Restkörper, insbesondere auch für den Kugelausschnitt (Kugelsektor) und den Kugelabschnitt (Kugelsegment), auch Kugelkappe genannt.

Körper	Oberfläche	Volumen	Erklärungen
Pyramidenstumpf	$O = G + D + M$	$V = \frac{1}{3}h \cdot (G + \sqrt{G \cdot D} + D)$	G ist die Grundfläche, D die Deckfläche, h die Höhe des Stumpfes
Kegelstumpf	$O = \pi(r_1^2 + s(r_1 + r_2) + r_2^2)$	$V = \frac{1}{3}h \cdot \pi(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$	r ₁ ist der Radius der Grundfläche, r ₂ ist der Radius der Deckfläche
Kugelausschnitt	$O = \pi \cdot r_1(2h + r_2)$	$V = \frac{2}{3}\pi r_1^2 h$	r ₂ = $\sqrt{h(2r_1 - h)}$ r ₁ ist der Radius des Ausschnittes/Abschnittes,
Kugelabschnitt	$O = 2\pi \cdot r_1 \cdot h + r_2^2 \cdot \pi$	$V = \frac{1}{2}\pi \cdot h^2(3r_1 - h)$	r ₁ ist der Radius der Kugel

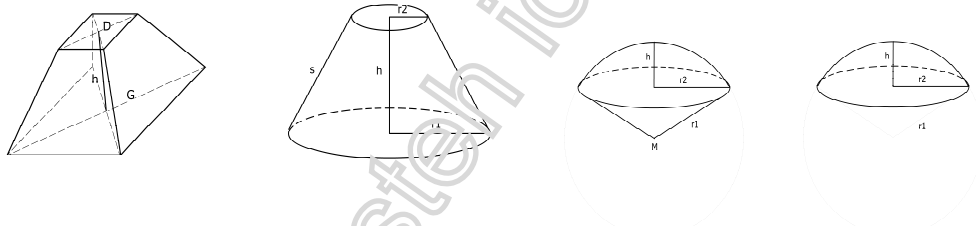


Abbildung 8: Pyramidenstumpf, Kegelstumpf, Kugelausschnitt (Sektor), Kugelabschnitt (Segment oder Kappe)